Όνομα: Γιώργος Καφεντζής  Ημερ. Παραδ: 8/11/02
Α.Μ: 1367

ΗΥ-215: 4η Σειρά Ασκήσεων

20/20

6. Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος

$$x(t) = \frac{1}{\pi t}.$$

Το σήμα $x(t) = \frac{1}{\pi t}$ είναι περιττό γιατί $-x(-t) = -\frac{1}{-\pi t} = \frac{1}{\pi t} = x(t)$

Άρα ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος θα έχει μόνο μιγαδικό μέρος και θα είναι:

$$X(f) = I(f) = -2j\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\pi f t}{\pi t}\,dt = -\frac{2}{\pi}j\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2\pi f t}{t}\,dt \quad ①$$

Όμως ισχύει $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \alpha>0 \\ 0, & \alpha=0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \alpha<0 \end{cases}$ ②

Η ① λόγω ② γράφεται:

$$X(f) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}j\cdot\frac{\pi}{2}, & f>0 \\ -\frac{2}{\pi}j\cdot 0, & f=0 \\ -\frac{2}{\pi}j\left(-\frac{\pi}{2}\right), & f<0 \end{cases} = \begin{cases} -j, & f>0 \\ 0, & f=0 \\ j, & f<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f), \quad \text{με } \mathrm{sgn}(t) = \frac{t}{|t|},\ t\neq 0.$$

15|15

5. Αποδείξτε ότι το πραγματικό, $R(f)$, και φανταστικό, $I(f)$, τα μετασχηματισμού Fourier ενός μιγαδικού σήματος, $x(t)$:

$$x(t) = x_1(t) + j\,x_2(t)$$

δίνονται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1(t)\cos 2\pi f t + x_2(t)\sin 2\pi f t]\,dt$$

$$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_2(t)\cos 2\pi f t - x_1(t)\sin 2\pi f t]\,dt$$

Ο Μετασχηματισμός Fourier γράφεται:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1(t) + j\,x_2(t))\,e^{-j2\pi f t}\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1(t)\,e^{-j2\pi f t} + j\,x_2(t)\,e^{-j2\pi f t})\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1(t)(\cos 2\pi f t - j\sin 2\pi f t) + j\,x_2(t)(\cos 2\pi f t - j\sin 2\pi f t)]\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1(t)\cos 2\pi f t - j\,x_1(t)\sin 2\pi f t + j\,x_2(t)\cos 2\pi f t - j^2 x_2(t)\sin 2\pi f t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1(t)\cos 2\pi f t + x_2(t)\sin 2\pi f t)\,dt + j\int_{-\infty}^{+\infty} (x_2(t)\cos 2\pi f t - x_1(t)\sin 2\pi f t)\,dt =$$

$$= R(f) + j\,I(f)$$

Άρα $R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1(t)\cos 2\pi f t + x_2(t)\sin 2\pi f t)\,dt$ και

$$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_2(t)\cos 2\pi f t - x_1(t)\sin 2\pi f t)\,dt.$$

15/15

2. Αν $X(f)$ παριστάνει το μετασχηματισμό Fourier ενός πραγματικού σήματος, δείξτε ότι ισχύει: $X^*(f) = X(-f)$, όπου $^*$ είναι συζυγές.

Ο μετασχηματισμός Fourier ενός πραγματικού σήματος, $X(f)$, είναι: $X(f) = R(f) + jI(f)$. Ας αποδείξουμε τη ζητούμενη σχέση:

Είναι: $X^*(f) = \left(R(f) + jI(f)\right)^* = R(f) - jI(f)$. ①

$X(-f) = R(-f) + jI(-f)$ ②

Όμως ξέρουμε ότι το σήμα συχνότητας $R(f)$ είναι άρτιο σήμα, δηλ. $R(f) = R(-f)$ και το σήμα συχνότητας $I(f)$ είναι περιττό σήμα, δηλ. είναι $I(-f) = -I(f)$. Άρα, σύμφωνα με τα παραπάνω, η ② γράφεται: $X(-f) = R(-f) + jI(-f) = R(f) - jI(f)$ ③. Από τις ①,③ παρατηρούμε ότι ισχύει $X(-f) = X^*(f)$.

3. Αποδείξτε ότι ένα πραγματικό αιτιατό σήμα $x(t)$ γράφεται ως:

$$x(t) = 4\int_0^{+\infty} R(f)\cos 2\pi f t\, df$$

για $t>0$, όπου $R(f)$ είναι το πραγματικό μέρος του μετασχηματισμού Fourier.

Ένα αιτιατό σήμα είναι μηδενικό για $t<0$, δηλ. $x(-t) = 0$, $t>0$. Άρα, το άρτιο μέρος $x_a(t)$ γράφεται: $x_a(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} = \frac{x(t)}{2} \Longrightarrow \boxed{x(t) = 2x_a(t)}$ ①. Άρα είναι:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t}\, df \overset{①}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} 2R(f) e^{j2\pi f t}\, df =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \left(R(f)\cos 2\pi f t + R(f) j \sin 2\pi f t\right) df =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} R(f)\cos 2\pi f t\, df + \overbrace{2j\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{R(f)}_{\text{άρτιο}}\, \underbrace{\sin 2\pi f t}_{\text{περιττό}}\, df}^{0} \text{ (ολοκλήρωμα περιττής)}$$

$$= 2 \cdot 2\int_0^{+\infty} R(f)\cos 2\pi f t\, df =$$

$$= 4\int_0^{+\infty} R(f)\cos 2\pi f t\, df$$

20/20

4. Έστω ότι $X(f)=R(f)+jI(f)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier ενός πραγματικού σήματος $x(t)$. Αποδείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του άρτιου μέρους του $x(t)$ είναι ίσος με $R(f)$ ενώ ο μετασχηματισμός Fourier του περιττού μέρους του σήματος είναι ίσος με $jI(f)$.

Είναι:

$$X(f)=X_a(f)+X_\pi(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t)e^{-j2\pi ft}\,dt+\int_{-\infty}^{+\infty} x_\pi(t)e^{-j2\pi ft}\,dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t)\cos 2\pi ft\,dt-j\int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t)\sin 2\pi ft\,dt+\int_{-\infty}^{+\infty} x_\pi(t)\cos 2\pi ft\,dt-j\int_{-\infty}^{+\infty} x_\pi(t)\sin 2\pi ft\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x_a(t)+x_\pi(t))\cos 2\pi ft\,dt-j\int_{-\infty}^{+\infty}(x_a(t)+x_\pi(t))\sin 2\pi ft\,dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos 2\pi ft\,dt-j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin 2\pi ft\,dt=R(f)+jI(f).$$

20/20

1. Αποδείξτε ότι $\varphi_{xy}(t)=\varphi^*_{yx}(-t)$, όπου $\varphi_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)\,dt$, όπου $*$ σημαίνει συζυγές.

Είναι $\varphi_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)\,dt$. Θέτω $\tau=t$ και τότε θα έχω:

$\varphi_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau)y(\tau+t)\,d\tau$. Επίσης, $\varphi^*_{yx}(-t)=\left(\int_{-\infty}^{+\infty} y^*(\tau)x(\tau-t)\,d\tau\right)^*=$

$=\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)x^*(\tau-t)\,d\tau$. Θέτω $\omega=\tau-t$ και τότε θα είναι:

$\varphi^*_{yx}(-t)=\int_{-\infty}^{+\infty} y(t+\omega)x^*(\omega)\,d\omega$. Τέλος, θέτω $\omega=\tau$ και έχω:

$$\varphi^*_{yx}(-t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau)y(t+\tau)\,d\tau$$